EPITA

Mathématiques

Contrôle (S4)

mars 2018

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Contrôle

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1 (4 points)

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1+t}-1}{t^3}\,\mathrm{d}t.$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$

Exercice 2 (3 points)

Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^n)}$ où $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que I converge.

2. Via le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ et en remarquant, après avoir effectué le changement de variable que $u^n = 1 + u^n - 1$, calculer I.

Exercice 3 (4 points)

Soient $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(x)\big)\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\cos(x)\big)\mathrm{d}x$.

1. Montrer (rigoureusement) que $\ln\big(\sin(x)\big) \underset{0}{\sim} \ln(x)$.

2. Montrer que I converge et, via le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - x$, que $I = J$.

3. Montrer, via le changement de variable $u = 2x$, que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\bigl(\sin(2x)\bigr)\mathrm{d}x$.

4. Via la relation $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, en déduire la valeur de I.

Exercice 4 (3,5 points)

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P\,, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\big(1-x^2\big)\,\mathrm{d}x$. Via la méthode de Gram-Schmidt, déterminer, à partir de la base $(1, X, X^2)$ de E une base orthogonale (P_0, P_1, P_2) de E pour $\langle\,,\rangle$.

[suite du cadre page suivante]

Exercice 5 (3 points)

Soient $(E, \langle\,,\rangle)$ un espace euclidien et $f : E \to E$ une application.

1. Supposons que f vérifie $\forall (x,y) \in E^2 : \langle f(x)\,,y\rangle = -\langle x\,,f(y)\rangle$. Montrer que

$$\forall (x,y,z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \Big\langle f(\lambda x + y) - \big(\lambda f(x) + f(y)\big)\,, z \Big\rangle = 0$$

2. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

$$(i)\quad \forall (x,y) \in E^2 \,:\, \langle f(x)\,,y\rangle = -\langle x\,,f(y)\rangle$$

$$(ii)\quad f \in \mathscr{L}(E) \text{ et } \forall x \in E \;\; \langle f(x)\,,x\rangle = 0$$

Exercice 6 (3 points)

Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$.

1. Via le changement de variable $u = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$, déterminer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2}$.

2. Via le changement de variable $u = t - \dfrac{1}{t}$, calculer I.