

EPITA

Mathématiques

Contrôle (S4)

mars 2018

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Contrôle

Durée : trois heures

Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1 (4 points)

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{\sqrt{1+t}-1}{t^3} dt.$

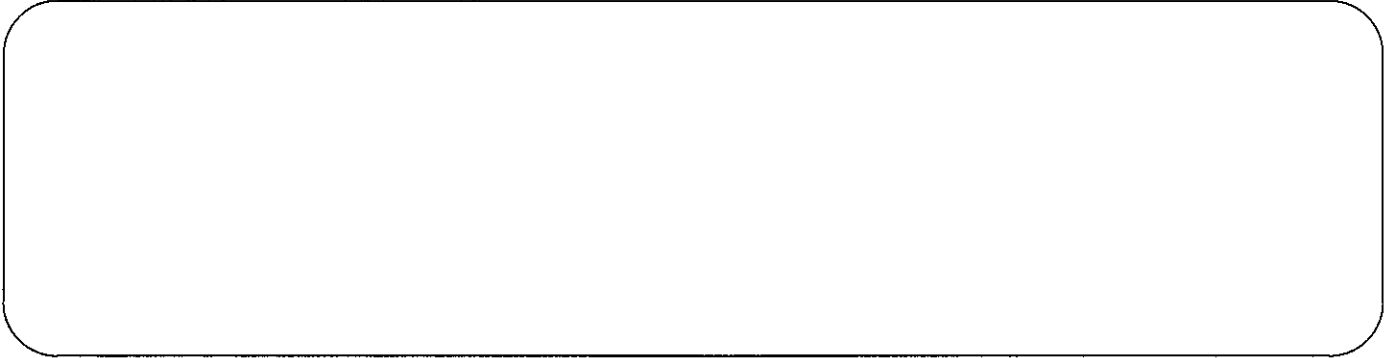
2. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt.$

3. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{t}} dt.$

Exercice 2 (3 points)

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^n)}$ où $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que I converge.



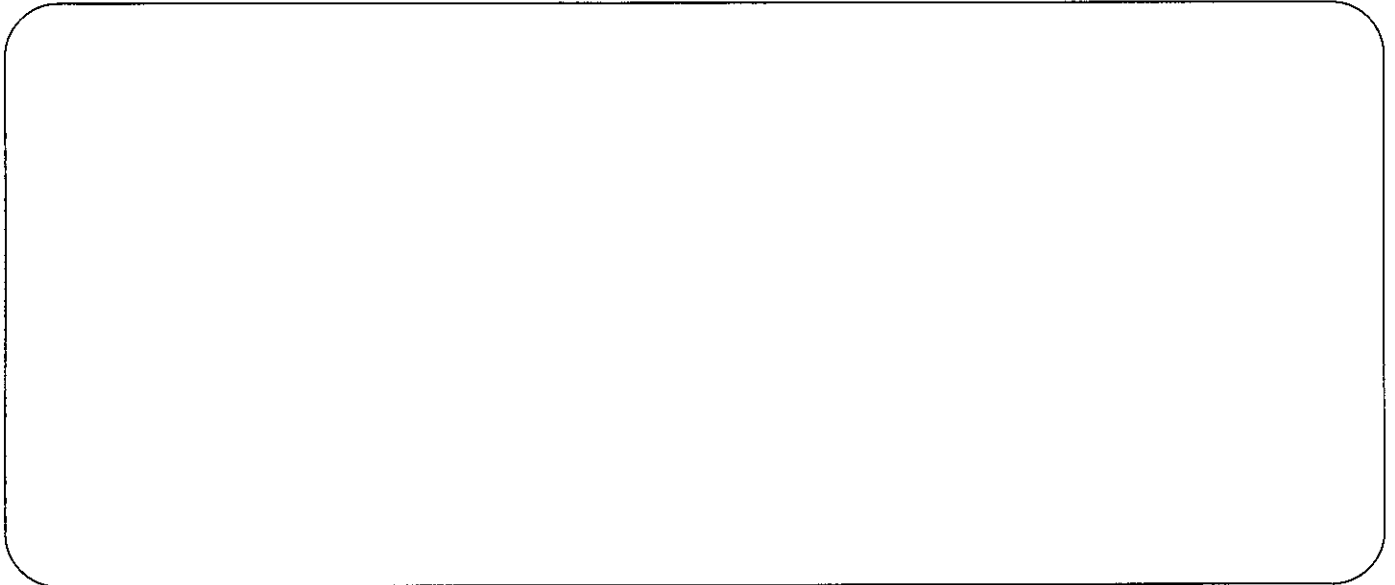
2. Via le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ et en remarquant, après avoir effectué le changement de variable que $u^n = 1+u^n-1$, calculer I .



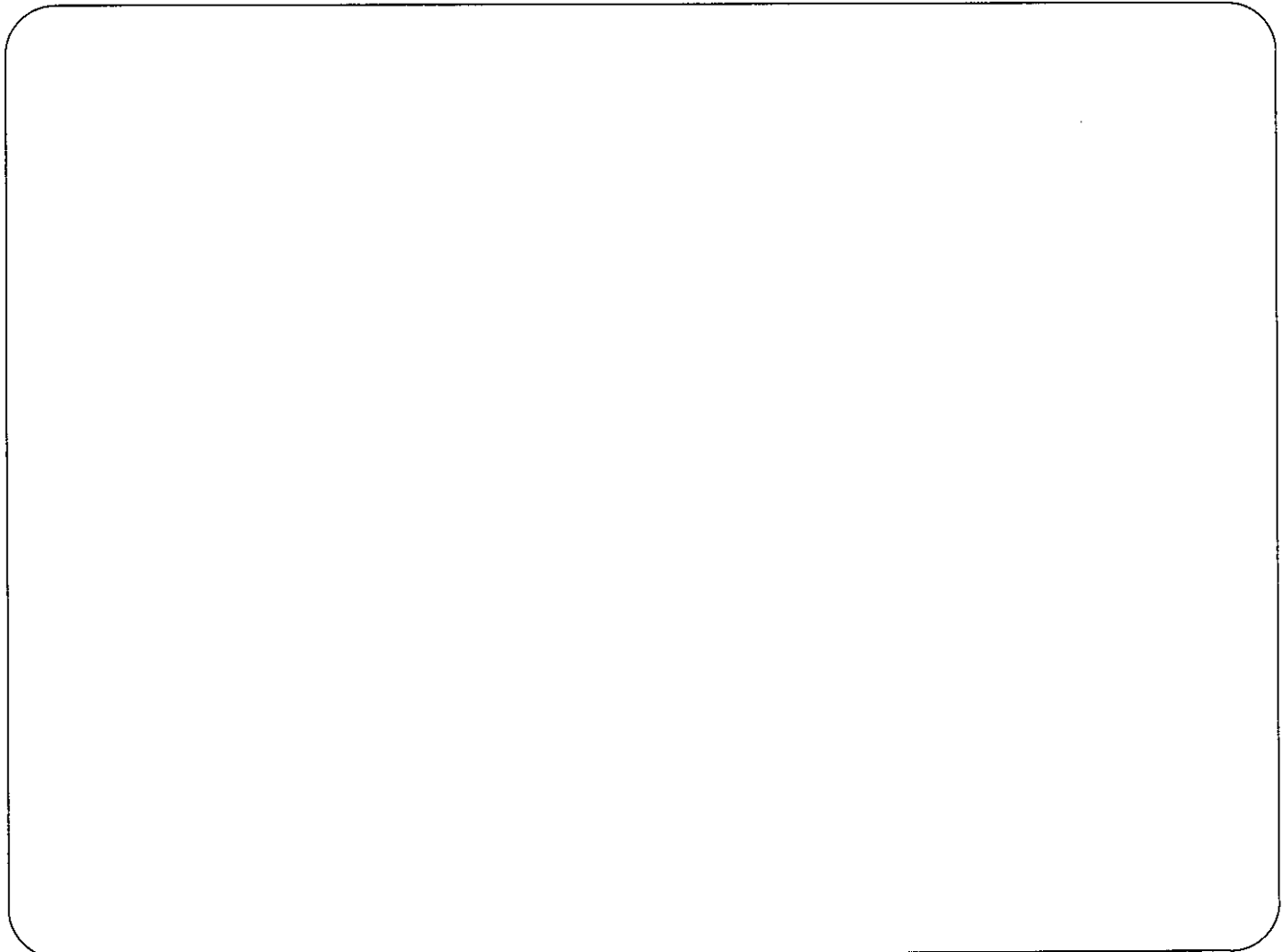
Exercice 3 (4 points)

Soient $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) dx$.

1. Montrer (rigoureusement) que $\ln(\sin(x)) \underset{0}{\sim} \ln(x)$.



2. Montrer que I converge et, via le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$, que $I = J$.



3. Montrer, via le changement de variable $u = 2x$, que $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x)) dx$.

4. Via la relation $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$, en déduire la valeur de I .

Exercice 4 (3,5 points)

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)(1-x^2) dx$. Via la méthode de Gram-Schmidt, déterminer, à partir de la base $(1, X, X^2)$ de E une base orthogonale (P_0, P_1, P_2) de E pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

[suite du cadre page suivante]

Exercice 5 (3 points)

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $f : E \rightarrow E$ une application.

1. Supposons que f vérifie $\forall (x, y) \in E^2 : \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$. Montrer que

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \langle f(\lambda x + y) - (\lambda f(x) + f(y)), z \rangle = 0$$

2. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad \forall (x, y) \in E^2 : \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$$

$$(ii) \quad f \in \mathcal{L}(E) \text{ et } \forall x \in E \quad \langle f(x), x \rangle = 0$$

Exercice 6 (3 points)

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 + 1}{t^4 + 1} dt$.

1. Via le changement de variable $u = \frac{t}{\sqrt{2}}$, déterminer $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 2}$. En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 2}$.

2. Via le changement de variable $u = t - \frac{1}{t}$, calculer I .