Suites

(trois semaines)

(du lundi 15 janvier 2018 au vendredi 2 février 2018)

Exercice 1

Donner un exemple différent de suite réelle pour chacun des adjectifs suivants :

1. croissante
2. décroissante
3. périodique
4. ni croissante, ni décroissante
5. bornée
6. alternée
7. bornée non convergente
8. majorée et non minorée
9. ni majorée ni minorée
10. majorée par 1 et convergente vers 1
11. majorée par 1 et non convergente vers 1
12. divergente vers $+\infty$
13. strictement croissante et bornée
14. croissante et minorée
15. décroissante non minorée

Exercice 2

Dire, en justifiant votre réponse, si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si une suite n'est pas bornée, elle diverge ?
2. Si une suite diverge, elle n'est pas bornée ?
3. La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente ?

Exercice 3

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$ et deux suites réelles (a_n) et (b_n) définies par

$$\begin{cases} a_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} b_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} \end{cases}$$

Olivier Rodot

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$. $\leq b_0$
2. En déduire que (a_n) et (b_n) convergent et ont même limite.

À partir de cette question, on pose $a = b\cos(\alpha)$ où $\alpha \in]0, \pi/2[$

3. En utilisant la formule
$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\alpha)),$$
calculer a_1, b_1, a_2 et b_2 en fonction de b et α.
4. Exprimer a_n et b_n en fonction de n, b et α.
5. En remarquant que pour $u \in]0, \pi/2[$, $\cos(u) = \dfrac{\sin(2u)}{2\sin(u)}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$b_n = \frac{b\sin(\alpha)}{2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$$
6. En déduire les limites de (a_n) et (b_n) en fonction de b et α.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k}$.

1. Montrer que (u_n) est convergente et préciser sa limite.
2. Montrer que (nu_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n + k}$.

Montrer que (u_n) est convergente.

Exercice 6

Soient $a \in]1, +\infty[$ et (u_n) définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

Soit (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$$

1. Montrer (sans récurrence) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_{n-1}^2$.
2. En déduire v_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de (v_n).
4. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 7

Soit (u_n) la suite réelle définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Que vaut la somme $\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Via la question précédente, montrer (sans récurrence), que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 2$. Montrer (sans récurrence) que $\frac{1}{k!} = \frac{1}{2 \times 3 \times \cdots \times k} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$.

   Vérifier que l'inégalité est encore vraie pour $k = 1$.

4. Montrer (sans récurrence) que (u_n) est croissante.

5. Montrer (sans récurrence), via les questions 2 et 3, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 3$.

6. (u_n) est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

Exercice 8

Soient (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \iff \begin{cases} u_{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \\ \text{et} \\ u_{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \end{cases}$$

Exercice 9

Soit (u_n) une suite réelle et $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (u_n). Montrer que toute suite extraite de $(u_{\varphi(n)})$ est extraite de (u_n).

Exercice 10

Soit (u_n) une suite réelle telle que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{5n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 11

Soit (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$.

2. En déduire que (u_n) est divergente.

Exercice 12

Soient (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n\,n!}$.

1. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. En admettant que leur limite commune est e, montrer que $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 13

Soient $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ deux suites définies par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{3n^2}$.

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 14

Considérons les deux suites réelles (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{(4n+4)!}$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 15

Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies pour tout $n \geqslant 1$ par

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 16

1. Déterminer un développement limité au voisinage de $+\infty$ à l'ordre 4 de $\sin^2\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
2. Déterminer un développement limité au voisinage de $+\infty$ à l'ordre 2 de $\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$.
3. Déterminer un développement limité au voisinage de $+\infty$ à l'ordre 3 de $(\cos(1/n))^{\sin(1/n)}$.

Exercice 17

Déterminer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ où $a \in \mathbb{R}$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 \sin\left(\frac{1}{n}\right) - n^2$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\ln(1+e^{-n})\right)^{\frac{1}{n}}$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(\sqrt{1+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}-1\right)$.

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^n + e\right)$.