| feuille 1/2 | corrigé<br>CONTROLE ECRIT N°2<br>Matière: **SIGNAL I3**<br>Remis par : **N. ZITOUNI** | **Année : 2019**<br>Date : Mai 2019<br>**Temps** : 2 h |
|---|---|---|

**Documents non autorisés**

## EXERCICE I

**1-** Soient deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ à temps continu, périodiques, de même période $T$.
Exprimer $C_{xy}(\tau)$ en fonction des coefficients de Fourier respectifs $X_n$ et $Y_n$ de $x(t)$ et $y(t)$.

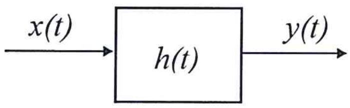
2- Donner les coefficients de Fourier Xn du signal $x(t) = A.\cos(2.\pi.t/T)$

3- Donner les coefficients $Y_n$ du signal $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{rect(t-nT)}{[\Delta]}$

4- En déduire la fonction d'intercorrélation $C_{xy}(\tau)$

## EXERCISE II

On considère le filtre suivant :

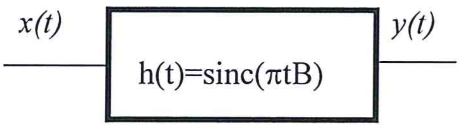



où : $x(t) = A.\sin(2.\pi.f_1.t)$
et $h(t) = B.\text{sinc}(\pi.f_o.t)$

1- Calculer X(f) et Y(f).
2- Exprimer y(t) en fonction de h(t) et de x(t).
3- En déduire Y(f), $(f_1 < f_o/2)$
4- Calculer la transformée de Hilbert de y(t)

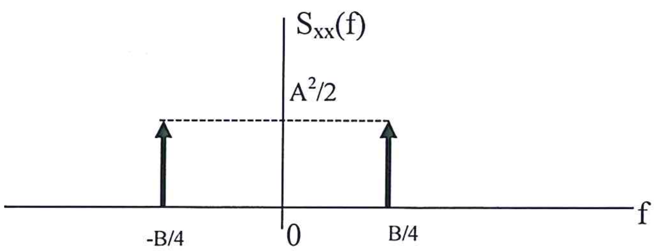
## EXERCICE III

La figure suivante montre un système décrit par sa réponse impulsionnelle:




**1)** Calculer la fonction de transfert H(f) du système

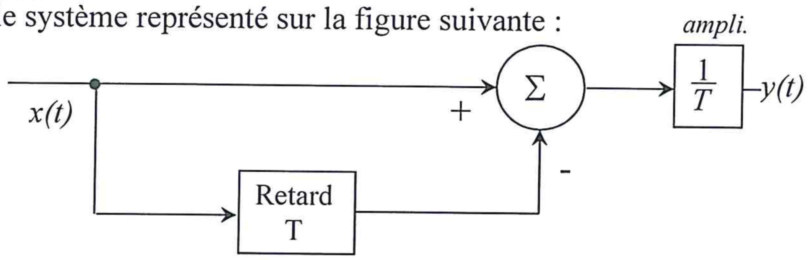
x(t) est un signal aléatoire stationnaire de moyenne statistique $E_x$ = cte et de densité spectrale de puissance $S_{xx}(f)$ donnée par la figure suivante :



2) Calculer la densité spectrale de puissance de y(t)
3) Calculer la fonction d'autocorrélation statistique de *y(t)*
4) En déduire la puissance de y(t).

**EXERCICE IV**

Considérons le système représenté sur la figure suivante :




1- Exprimer $y(t)$ en fonction de $x(t)$ . En déduire la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système.
2- Calculer la fonction de transfert $H(w)$.
3- Lorsque $wT << 1$, calculer la valeur approximative de Y(w) en fonction de X(w) (utiliser le développement limité de $e^{-jwT}$ )
4- Quelle fonction mathématique réalise le système ?

## EXERCICE I



1°- $C_{xy}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n Y_n^* e^{2\pi j n \frac{\tau}{T}}$

2°- $x(t) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \underbrace{A \frac{e^{2\pi j \frac{t}{T}} + e^{-2\pi j \frac{t}{T}}}{2}}_{\text{formule d'Euler}} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{2\pi j n \frac{t}{T}}}_{\text{décomposition en série complexe d'un signal périodique.}}$

par identification on trouve $\begin{cases} X_1 = X_{-1} = \frac{A}{2} \\ X_i = 0 \text{ ailleurs.} \end{cases}$

3°- $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\text{rect}(t-nT)}{[\Delta]}$

$y(t) = \underbrace{\frac{\text{rect}(t)}{[\Delta]} * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)}_{\text{périodisation par convolution}} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n e^{2\pi j n \frac{t}{T}}}_{\text{décomposition en série complexe d'un signal périodique}}$

$$Y(f) = \Delta \cdot \text{sinc}(\pi f \Delta) \cdot \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta}{T} \cdot \text{sinc}\left(\pi \Delta \frac{n}{T}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \sum Y_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$\Rightarrow \quad Y_n = \frac{\Delta}{T} \text{sinc}\left(\pi \Delta \frac{n}{T}\right)$$

4°- $C_{xy}(\tau) = X_{-1} Y_{-1}^{*} e^{-2\pi j \frac{t}{T}} + X_1 Y_1 e^{2\pi j \frac{t}{T}}$

$$C_{xy}(\tau) = \frac{A}{2} \cdot \frac{\Delta}{T} \operatorname{sinc}\left(-\frac{\pi\Delta}{T}\right) e^{-2\pi j \frac{t}{T}} + \frac{A}{2}\frac{\Delta}{T} \operatorname{Sinc}\left(\frac{\pi\Delta}{T}\right) e^{2\pi j \frac{t}{T}}$$

$$C_{xy}(\tau) = \frac{A\Delta}{2T} \operatorname{Sinc}\left(\frac{\pi\Delta}{T}\right) \cdot \left[ e^{-2\pi j \frac{t}{T}} + e^{2\pi j \frac{t}{T}} \right]$$

$$C_{xy}(\tau) = \frac{A.\Delta}{\cancel{2}T} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\Delta}{T}\right) \left[\cancel{2} \cos\left(2\frac{\pi t}{T}\right)\right]$$

$$\boxed{C_{xy}(\tau) = \frac{A\Delta}{T} \operatorname{Sinc}\left(\frac{\pi\Delta}{T}\right) \cos. \frac{2\pi t}{T}}$$

## EXERCICE II

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$x(t) = A \cdot \sin(2\pi f_1 t)$

$h(t) = B \operatorname{sinc}(2\pi f_0 t)$

1°- $X(f) = A \dfrac{\delta(f-f_1) - \delta(f+f_1)}{2j}$

$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$.

$H(f) = \dfrac{B}{f_0} \dfrac{\operatorname{rect}(f)}{[f_0]}$

$Y(f) = \dfrac{AB}{f_0} \cdot \dfrac{\operatorname{rect}(f)}{[f_0]} \cdot \left[\dfrac{\delta(f-f_1) - \delta(f+f_1)}{2j}\right]$

Si $f_1 < f_0/2$

$Y(f) = \dfrac{AB}{f_0} \cdot \dfrac{\delta(f-f_1) - \delta(f+f_1)}{2j}$

2°- $y(t) = x(t) * h(t)$

3°- deja fait

4°- $y_H(t) = TH\left(y(t)\right)$

$$Y_H(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)\cdot Y(f)$$

$$= -j\,\mathrm{sgn}(f)\cdot \frac{A.B}{f_0}\cdot \frac{\delta(f-f_1)-\delta(f+f_1)}{2j}$$

$$Y_H(f) = -\frac{A.B}{f_0}\,\frac{\delta(f-f_1)+\delta(f+f_1)}{2}$$

$$y_H(t) = -\frac{AB}{f_0}\cos(2\pi f_1 t)$$

# EXERCICE III

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t) = \mathrm{sinc}(\pi t B)} \longrightarrow y(t)$$

1°- $H(f) = \frac{1}{B}\,\frac{\mathrm{rect}(f)}{[B]}$

2°- $S_{yy}(f) = S_{xx}(f)\cdot |H(f)|^2$

$$\left(\delta(f+B/4) + \delta(f-B/4)\right)\cdot \frac{1}{B^2}\cdot \frac{\mathrm{rect}^2(f)}{[B]}$$

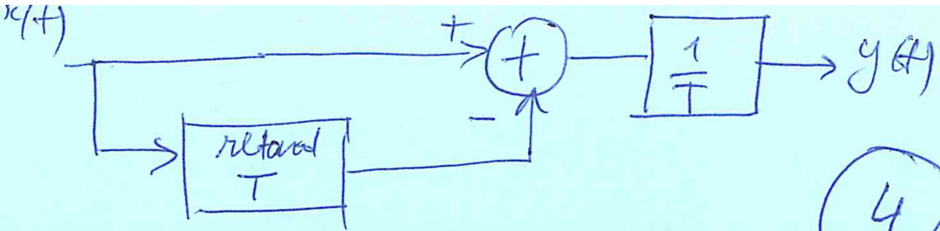
$$= \frac{1}{B^2}\left(\delta(f+B/4) + \delta(f-B/4)\right)$$

3°) $\mathrm{puiss}(y) = R_{yy}(0)$

$$R_{yy}(\tau) = TF^{-1}\left(S_{yy}(f)\right) = \frac{2}{B^2}\cos\left(2\pi \frac{B}{4}\tau\right)$$

$$R_{yy}(0) = \frac{2}{B^2}$$

# EXERCICE IV




4

1/ $y(t) = \dfrac{x(t) - x(t-T)}{T}$

$$y(t) = x(t) * \frac{\delta(t) - \delta(t-T)}{T}$$

$$= x(t) * h(t). \quad \text{avec } h(t) = \frac{\delta(t) - \delta(t-T)}{T}$$

2° $H(\omega) = \dfrac{1 - e^{-j\omega T}}{T}$

3°- $e^{-j\omega T} \simeq 1 - j\omega T$ lorsque $\omega T << 1$

$$H(\omega) = \frac{1 - 1 + j\omega T}{T} = j\omega$$

4°) $Y(\omega) = X(\omega) \cdot (j\omega)$

$\Longrightarrow y(t) = x'(t)$ : fonction dérivateur.